Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1 eta erdi

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

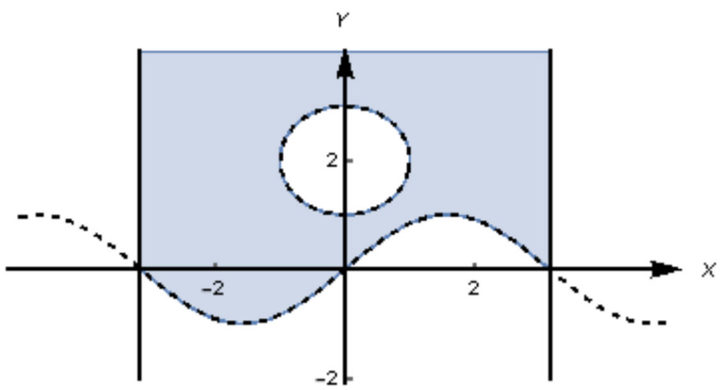
1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}\left(y-\sin x\right)}{\sqrt{x^2+(y-2)^2-1}}+\sqrt{\pi-|x|}$$

(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y-\sin x>0,\ x^2+(y-2)^2-1>0,\ \pi-|x|\geq 0\right\}$$

- $y-\sin x>0 \iff y>\sin x$ ($y=\sin x$ kurbaren gainetik dagoena).
- $x^2+(y-2)^2-1>0 \iff x^2+(y-2)^2>1$ ((0,2) puntuan zentroa eta 1 erradioko zirkunferentziaren kanpotik dagoena).
- $\pi-|x|\geq 0 \iff |x|\leq\pi$ ($x=-\pi$ eta $x=\pi$ zuzenen artean dagoena, zuzenak barne).



2.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) **Kalkula itzazu bere deribatu partzialak (0,0) eta (1,1) puntuetan.**

b) **Azter ezazu bere diferentziagarritasuna (0,0) eta (1,1) puntuetan.**

c) **Kalkula ezazu zein abiadurarekin aldatzen den *f*, (0,0) eta (1,1) puntuetatik mugitzen bagara $y=2x-3$ zuzenaren norabideari jarraituz.**

(2.5 puntu)

a) $\forall(x,y)\neq(0,0)$ deribatu partzialak deribazio-erregelak erabiliz kalkula daitezke:

$$f'_x(x,y)=\frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Rightarrow f'_x(1,1)=\frac{1}{2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{3y^2\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Rightarrow f'_y((1,1)=\frac{1}{2}$$

Deribatu partzialak (0,0) puntuan definizioa erabiliz kalkulatu behar ditugu:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{h^3}{h^2}-0}{h}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\dfrac{k^3}{k^2}-0}{k}=1$$

b) $\forall(x,y)\neq(0,0)$ deribatu partzialak jarraituak dira, orduan f diferentziagarria da.

(0,0) puntuan, diferentziagarritasunerako B.B.N erabiliko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\dfrac{h^3+k^3}{h^2+k^2}-h-k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\cancel{h^3}+\cancel{k^3}-\cancel{h^3}-h^2k-k^2h-\cancel{k^3}\right|}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\left|-\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\sin^2\theta\cdot\cos\theta\right|}{\rho^3}=$$

$$=\underbrace{\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\left|\cos^2\theta\cdot\sin\theta+\sin^2\theta\cdot\cos\theta\right|}_{\nexists}$$. Beraz, *f* ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

(*) Polarretan adieraziz: $\begin{cases}h=\rho\cdot\cos\theta\\ k=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$

c) *f*-ren aldakuntzaren abiadura $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektore unitarioak adierazitako norabidean *f*-ren deribatu direkzionalak ematen du, $\dfrac{df}{d\vec{u}}$. Beraz, $\vec{u}=(1,2)$ unitario bihurtzen hasiko gara: $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Eta, deribatu direkzionala kalkulatzeko, bi kasu bereizi behar ditugu:

- (1,1) puntuan f diferentziagarria denez:

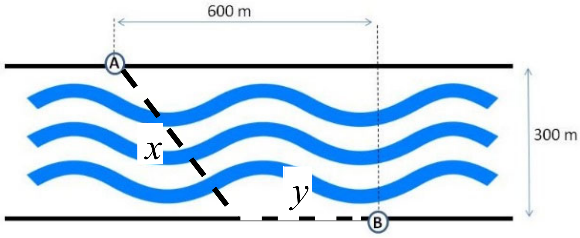
$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)}=\overline{\nabla f}(1,1)\cdot\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}$$

- (0,0) puntuan, berriz, f diferentziagarria ez denez:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\dfrac{\lambda^3\cdot\left(h_1^3+h_2^3\right)}{\lambda^2\cdot\left(h_1^2+h_2^2\right)}}{\lambda}=h_1^3+h_2^3\overset{(*)}{=}\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{8}{5\sqrt{5}}=\frac{9}{5\sqrt{5}}$$

(*) $\vec{u}=(h_1,h_2)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

3.- Marrazkian erakutsitako ibaiaren alde bietan dauden A eta B puntuen artean, zuntz optikozko kablea eramateko kostua minimizatu nahi dugu. Ur azpian eramateko prezioa 125€/m eta lurretik eramatekoa 100€/m dela jakinda, kalkulatu zenbat metro ur azpian eta zenbat metro lurretik eraman behar da kablea, kostua minimizatzeko.



(2.5 puntu)

Kablea ur azpian x metro eta lurretik y metro doala suposatzen dugu (marrazkian adierazita dagoen bezala).

Honela, minimizatu behar dugun kostua hurrengo f funtzioa da:

$$f(x,y)=125x+100y$$

non $\begin{cases} x^2=(600-y)^2+(300)^2 \\ 300\le x\le\sqrt{(600)^2+(300)^2} \\ 0\le y\le 600 \end{cases}$ baldintzak bete behar diren

Baldintza hauek multzo itxi eta mugatua osatzen dute, eta, beraz, Weiertrass-en teoremak ziurtatuko du f funtzioak maximo eta minimo absolutuak dituela multzo horretan. Guk aurkitu nahi duguna minimo absolutua da.

Hasiko gara $x^2=(600-y)^2+(300)^2$ baldintza betetzen duten puntu kritikoak kalkulatzen, Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz:

$$w(x,y)=125x+100y+\lambda\left(x^2-(600-y)^2-(300)^2\right)$$

Funtzio honen puntu kritikoak kalkulatuz:

$$\left.\begin{cases} w'_x=125+2\lambda x=0 \\ w'_y=100+2\lambda(600-y)=0 \\ x^2=(600-y)^2+(300)^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow -\lambda=\frac{125}{2x}=\frac{100}{2(600-y)} \Leftrightarrow 5(600-y)=4x \Leftrightarrow 600-y=\frac{4x}{5}\Rightarrow$$

$$x^2=(600-y)^2+(300)^2=\left(\frac{4x}{5}\right)^2+(300)^2 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{25}=(300)^2 \overset{x>0}{\Rightarrow} \frac{3x}{5}=300 \Leftrightarrow x=500 \Rightarrow y=200$$

$$\Rightarrow A(x,y)=(500,200),\ \lambda=-\frac{1}{8}$$

Beste baldintzak kontuan hartuz, bi puntu kritiko gehiago dauzkagu:

$B=(300,600)$ (A-tik B-ra "L" bat eginez joango bagina) eta $C=\left(\sqrt{(600)^2+(300)^2},0\right)$ (A-tik B-ra bide laburrenetik joanez gero).

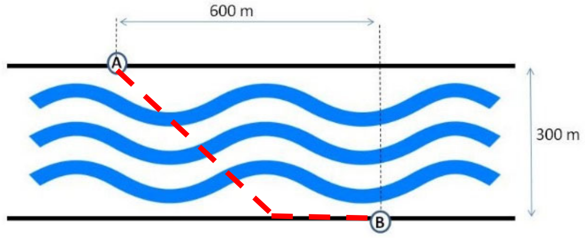
Orain, kostu minimoa aurkitzeko, f-ren balioa kalkulatu baino ez dugu behar:

$f(A) = f(500,200) = 82500$

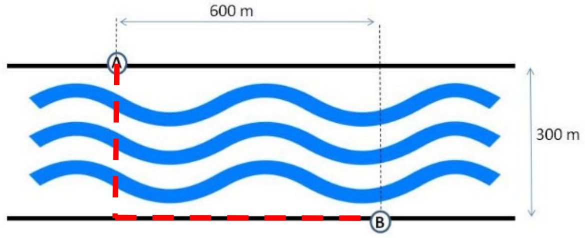
$f(B) = f(300,600) = 97500$

$f(C) = f\left(\sqrt{(600)^2 + (300)^2}, 0\right) = f\left(300\sqrt{5}, 0\right) \simeq 83852$

Beraz, kostu minimoa $A = (500,200)$ puntuak ematen du (ur azpitik $x = 500m$ eta lurretik $y = 200m$), marrazkian erakusten den bezala:



Eta, kostu maximoa (eskatzen ez bada erer) $B = (300,600)$ puntuan lortuko genuke, ur azpitik $x = 300m$ eta lurretik $y = 600m$), marrazkian ikusten denez:



4.- $f(x,y) = e^{\phi(xy)} + \int_0^{xy} \frac{e^t}{t-1} dt$ **funtzio diferentziagarria emanik, eta jakinda** $\phi(u)$ **ere diferentziagarria dela,** $\phi(0) = 1$ **eta** $\phi'(0) = -1$ **izanik, lortu norabidea eta noranzkoa zeinean** f **azkarren jaisten den,** $P(x,y) = (0,2)$ **puntutik abiatuz.**

(Puntu 1)

Norabidea eta noranzkoa non *f* azkarren jaisten den $-\overrightarrow{\nabla f}(0,2) = \left(-f_x'(0,2), -f_y'(0,2)\right)$ da.

f funtzioaren deribatu partzialak kalkulatzeko deribazio parametrikoa erabiliko dugu:

$$f_x'(x,y) = y\phi'(xy)e^{\phi(xy)} + \frac{ye^{xy}}{xy-1} \quad \Rightarrow \quad f_x'(0,2) = 2\phi'(0)e^{\phi(0)} - 2 = -2e - 2$$

$$f_y'(x,y) = x\phi'(xy)e^{\phi(xy)} + \frac{xe^{xy}}{xy-1} \quad \Rightarrow \quad f_x'(0,2) = 0$$

Beraz, $-\overrightarrow{\nabla f}(0,2) = \left(2e + 2, 0\right)$

5.- $\begin{cases} x\cos y + y\cos z + z\cos x = \pi \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy = \pi^2 \end{cases}$ **ekuazio-sistema emanik,**

a) Egiaztatu ea sistema honek $y = y(x)$ eta $z = z(x)$ funtzio diferentziagarriak definitzen dituen inplizituki $x = 0$ puntuaren ingurunean, $y(0) = 0$ eta $z(0) = \pi$ direlarik.

b) Kalkulatu $y'(0)$ eta $z'(0)$.

(2.5 puntu)

a) $\begin{cases} F(x,y,z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - \pi = 0 \\ G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - \pi^2 = 0 \end{cases}$ ekuazio-sistemak $P(x,y,z) = (0,0,\pi)$ puntuan funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duenentz aztertuko dugu:

i. $\begin{cases} F(P) = 0 \\ G(P) = 0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} F'_x = \cos y - z\sin x & F'_y = -x\sin y + \cos z & F'_z = -y\sin z + \cos x \\ G'_x = 2x - y & G'_y = 2y - x & G'_z = 2z \end{cases}$ jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan.

iii. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix} = -2\pi \neq 0$

Beraz, P puntuaren ingurune batean, emandako sistemak $y = y(x)$ eta $z = z(x)$ funtzio diferentziagarriak definitzen ditu, non $y(0) = 0$ eta $z(0) = \pi$, eta $\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$ ekuazio-sistema x-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0 \\ G'_x + G'_y \cdot y' + G'_z \cdot z' = 0 \end{cases} \xRightarrow{P \text{ puntuan}} \begin{cases} 1 - y'(0) + z'(0) = 0 \\ 2\pi \cdot z'(0) = 0 \iff z'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y'(0) = 1$$